工程电磁场

王泽忠

1.3 标量场的方向导数和梯度

1. 方向导数的定义

对于定义在某空间上的标量场

需要研究标量函数 $u(\mathrm{M})$ 在其中的变化情况

根据多元函数微分学，

要了解 $u(\mathrm{M})$ 沿着 x 轴方向的变化，

只需要求出 $u(x,y,z)$ 关于 x 的偏导数

想知道 $u(\mathrm{M})$ 沿着其它任意方向的变化情况？

计算 $u(\mathrm{M})$ 沿着任意方向的导数

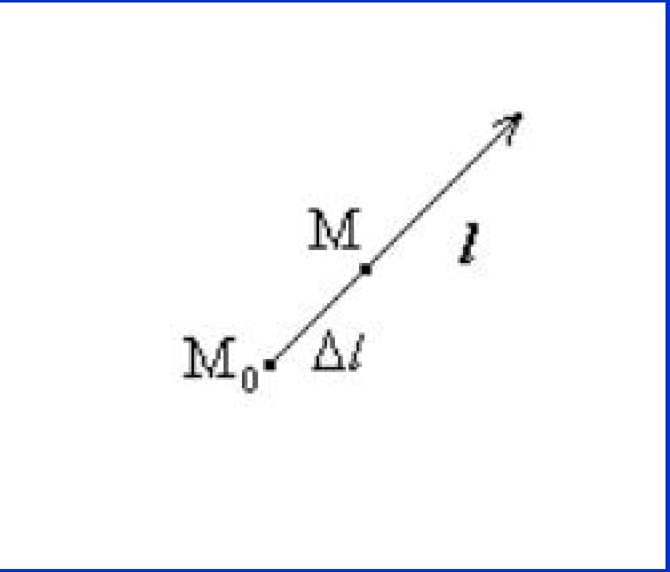
从标量场中任一点 M_0 出发，

引一条射线 l，

在 l 上任取一点 M，

Δl 表示从 M_0 到 M 的距离

$$\Delta u = u(\mathrm{M}) - u(\mathrm{M}_0)$$



若当沿着 l，$\mathrm{M} \to \mathrm{M}_0$ 时，

比式 $\dfrac{\Delta u}{\Delta l} = \dfrac{u(\mathrm{M}) - u(\mathrm{M}_0)}{\Delta l}$ 的极限存在，怎么样？

就称此极限值为

函数 $u\left(\mathrm{M}\right)$ 在点 M_0 处沿 l 方向的方向导数，

记作 $\left.\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}\right|_{\mathrm{M}_0}$

$$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}\right|_{\mathrm{M}_0}=\lim_{\mathrm{M}\to\mathrm{M}_0}\frac{u(\mathrm{M})-u(\mathrm{M}_0)}{\Delta l}=\lim_{\mathrm{M}\to\mathrm{M}_0}\frac{\Delta u}{\Delta l}$$

方向导数是

标量函数在 M_0 处沿方向 l 对距离的变化率，

它反映了函数 $u\left(\mathrm{M}\right)$ 沿 l 方向增减的快慢情况

沿坐标轴的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$ 都是 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}$ 的特例

当 l 指向 x 轴正方向时，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}=\dfrac{\partial u}{\partial x}$；

当 l 指向 y 轴正方向时，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}=\dfrac{\partial u}{\partial y}$；

当 l 指向 z 轴正方向时，$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}=\dfrac{\partial u}{\partial z}$。

全导数还是偏导数？（如何理解？分解？）

2．方向导数的计算

在直角坐标系中，

设标量函数 $u(x,y,z)$ 在点 $\mathrm{M}_0\ (x_0, y_0, z_0)$ 处可微，

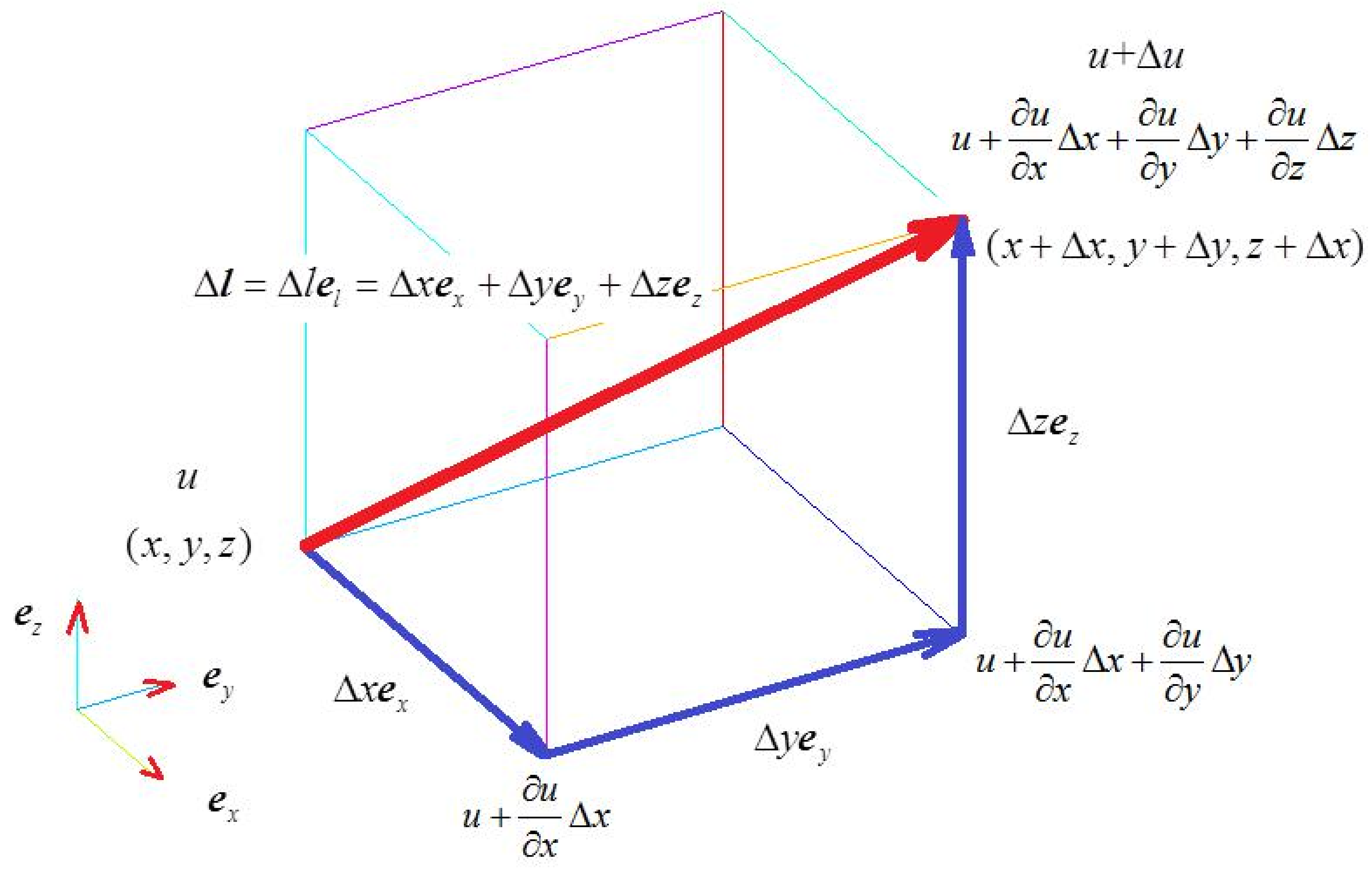
则函数 u 在点 M_0 处沿 $\boldsymbol{l}$ 方向的方向导数存在。

根据全微分（分解？）概念

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}$$


$u+\Delta u$
$u+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$
$(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta x)$
$\Delta \boldsymbol{l}=\Delta l\boldsymbol{e}_l=\Delta x\boldsymbol{e}_x+\Delta y\boldsymbol{e}_y+\Delta z\boldsymbol{e}_z$
$\Delta z\boldsymbol{e}_z$
u
(x,y,z)
$\boldsymbol{e}_z$
$\boldsymbol{e}_y$
$\boldsymbol{e}_x$
$\Delta x\boldsymbol{e}_x$
$\Delta y\boldsymbol{e}_y$
$u+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y$
$u+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x$

3．梯度

函数 u 在 M_0 点沿着不同方向的变化率不同

这个变化率如何随方向改变？

哪个方向的变化率最大？

最大的变化率又是多少？

在直角坐标系中，标量函数的方向导数为

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}l}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}$$

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}=\cos\alpha,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}=\cos\beta,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}=\cos\gamma$ 为 l 方向的方向余弦

l 方向的单位矢量可表示为

$$\boldsymbol{e}_l = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}x\boldsymbol{e}_x + \mathrm{d}y\boldsymbol{e}_y + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z}{\mathrm{d}l}$$

$$= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}\boldsymbol{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l}\boldsymbol{e}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}\boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{e}_l = \cos\alpha\boldsymbol{e}_x + \cos\beta\boldsymbol{e}_y + \cos\gamma\boldsymbol{e}_z$$

$\boldsymbol{e}_l$ 在相应的坐标轴上的投影

令矢量 $\boldsymbol{G} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$

根据矢量点积计算公式，可以看出

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\boldsymbol{G}\bullet\boldsymbol{e}_l$$

令 θ 表示矢量 $\boldsymbol{G}$ 与单位矢量 $\boldsymbol{e}_l$ 之间的夹角，

根据矢量点积的计算式，得

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\boldsymbol{G}\bullet\boldsymbol{e}_l=G\cos\theta$$

对给定函数和给定点，G 是固定值，

随着 $\boldsymbol{l}$ 方向改变，θ 变化，方向导数值随之变化

当 $\boldsymbol{l}$ 与坐标轴方向一致（如 x 轴），

则 $\dfrac{\partial u}{\partial l} = \boldsymbol{G} \bullet \boldsymbol{e}_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$　　（方向导数作为偏导数理解）

当 $\boldsymbol{l}$ 方向与 $\boldsymbol{G}$ 方向一致时，方向导数值达到最大，

最大的方向导数为 G 。G 是矢量 $\boldsymbol{G}$ 的模

梯度定义：

在标量场中任一点 M 处，如果存在矢量 $\boldsymbol{G}$ ，

其方向为 $u(x,y,z)$ 在该处方向导数最大的方向，

其模 $|\boldsymbol{G}|$ 是这个最大方向导数值。怎么样？

就称矢量 $\boldsymbol{G}$ 为标量场 $u(x,y,z)$ 在点 M 处的梯度。

记为 $\mathrm{grad}u = \boldsymbol{G}$

显然，在直角坐标系中

$$\mathrm{grad}u = \boldsymbol{G} = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

一个标量场在给定点的梯度

是对该标量场函数进行梯度运算的结果

梯度运算是分析标量场的工具

沿着梯度的方向，函数 $u(x.y,z)$ 增加得最快

方向导数等于梯度在该方向上的投影； 表示为

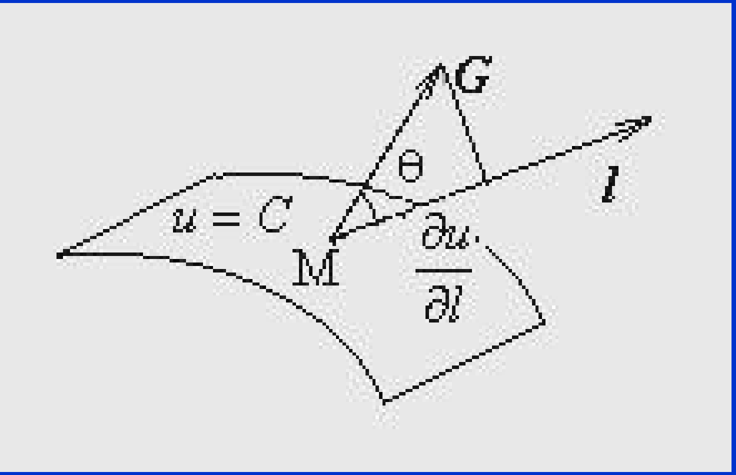
$$\frac{\partial u}{\partial l}=\text{grad}u\bullet\boldsymbol{e}_l=\left|\text{grad}u\right|\cos\theta$$

点 M 处，

梯度的方向垂直于

过该点的等值面，

且指向 u 增大的方向



方向导数与梯度和等位线的关系

标量场的每一点都有一个梯度

它是矢量

由其构成标量场的梯度场

标量场的梯度场是矢量场

4．梯度的运算公式

设 C 为空间常数，u 和 v 是空间的两个标量函数，

根据导数运算规则，可以导出梯度的运算规则：

1） $\mathrm{grad}C = 0$

2） $\operatorname{grad}(Cu) = C\operatorname{grad}u$

3） $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad}u \pm \operatorname{grad}v$

4） $\operatorname{grad}(uv) = u\operatorname{grad}v + v\operatorname{grad}u$

5） $\operatorname{grad}(\frac{u}{v}) = \frac{1}{v^2}(v\operatorname{grad}u - u\operatorname{grad}v)$

6） $\operatorname{grad}f(u) = f'(u)\operatorname{grad}u$

以上各式证明都不难，现仅给出以公式 6）的证明：

$$\operatorname{grad}f(u) = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

$$= f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

$$= f'(u)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}\right) = f'(u)\mathrm{grad}u$$

例： 标量场 $u(\mathrm{M}) = 3x^2 + z^2 - 2yz + 2zx$ 。

试求过 $\mathrm{M}_0(0, \ \frac{1}{2}, \ 1)$ 点的梯度和梯度的模。

这样解答？

解　因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x+2z,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2z,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2x-2y+2z$$

所以　$\mathrm{grad}u=(6x+2z)\boldsymbol{e}_x-2z\boldsymbol{e}_y+2(x-y+z)\boldsymbol{e}_z$

$$\boldsymbol{G}=\mathrm{grad}u\big|_{\mathrm{M}_0}=2\boldsymbol{e}_x-2\boldsymbol{e}_y+2(-\frac{1}{2}+1)\boldsymbol{e}_z$$

$$=2\boldsymbol{e}_x-2\boldsymbol{e}_y+\boldsymbol{e}_z$$

$$|\boldsymbol{G}|=\sqrt{2^2+2^2+1}=3$$ 简单！

梯度部分结束