工程电磁场

王泽忠

1.4　矢量场的通量和散度

1. 矢量场的通量

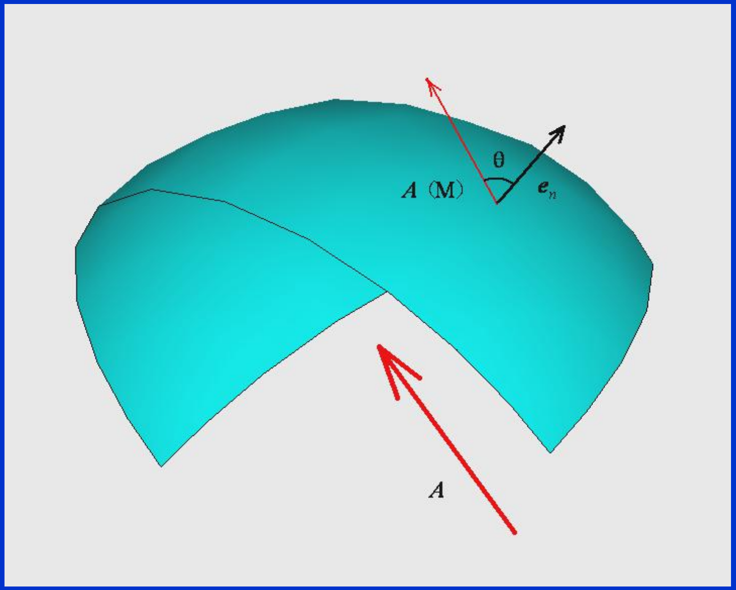
在场域中选取一曲面 S

取定一侧作为曲面的正侧

如果曲面是闭合的，

习惯上取外侧为正侧

以法线方向表示曲面正侧



取一点 M 与包含这点在内的一曲面元 dS

过 M 点作曲面的法向单位矢量 e_n，　接下去…

矢量 $\boldsymbol{A}$（M）穿过曲面元的通量定义为

$$\mathrm{d}\Phi = A_n \mathrm{d}S = \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{e}_n \mathrm{d}S = \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$（M）穿过曲面 $\boldsymbol{S}$ 的通量定义为

$$\Phi = \iint_S A_n \mathrm{d}S = \iint_S \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{e}_n \mathrm{d}S = \iint_S \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \mathrm{dS}\boldsymbol{e}_n$　　　　通量是一个标量

$\mathrm{d}\Phi = \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 可能取正值，也可能取负值

场矢量与曲面法线方向之间夹角θ决定。

若 S 是闭合曲面，且指定外侧方向为面的法线方向

$$\Phi = \oiint_S A_n \mathrm{d}S = \oiint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

若 $\Phi > 0$，表示散出闭合面的通量大于汇入的通量

说明有矢量线从闭合面内散发出来

若 $\Phi < 0$，表示汇入闭合面的通量大于散出的通量

说明有矢量线被吸入到闭合面内

若 $\Phi = 0$，表示散出通量与汇入通量相等

$\boxed{\text{在电磁场中有电通量和磁通量等}}$

通量说明图

例：在点电荷 q 产生的电场中，场矢量 $\boldsymbol{D}=\dfrac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$

其中 r 是点电荷 q 到场点 M 的距离， $\boldsymbol{e}_r$ 是从点电荷 q 指向场点 M 的单位矢量。设 S 为以点电荷为中心，R 为半径的球面，求从球内散出 S 的电通量 Φ 。

解　在球面 S 上恒有 $r=R$，

且 $\boldsymbol{e}_r$ 与球面的法向单位矢量 $\boldsymbol{e}_n$ 的方向一致，

未完？

$$\Phi = \oiint_S \boldsymbol{D} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{q}{4\pi R^2} \oiint_S \boldsymbol{e}_r \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \frac{q}{4\pi R^2} \oiint_S \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi R^2} \cdot 4\pi R^2 = q$$

可见，在球面 S 内产生电通量 Φ 的源，就是电荷 q

当 q 为正电荷时，Φ >0，为正源，

说明有场矢量线从 q 向外发出

当 q 为负电荷时，$\Phi < 0$，为负源，

说明有场矢量线终止于 q 。 完了

2. 散度的定义

通量用来分析闭合面内场矢量源的整体情况

但（转折）为了分析场中一点及其附近的情况，

就要将闭合面缩小到一点上

引入矢量场的**散度概念**

设有矢量场函数 A（M），

在场中作包围点 M 的闭曲面 S，

设其所包围的空间区域为 Ω，体积为 ΔV

当 Ω 收缩到 M 一点附近，即 $\Delta V \to 0$ 时，怎么样？

若极限 $\lim\limits_{\Delta V\to 0}\left(\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\Big/\Delta V\right)$ 存在，

则称此极限值为矢量场 $\boldsymbol{A}$（M）在点 M 处的散度

记作 $\mathrm{div}\boldsymbol{A}$。

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

散度运算是分析矢量场的工具

散度是描述矢量场中任一点发散性质的量

矢量的散度是标量

从定义可看出，散度就是**通量的体密度**

矢量 A 的散度形成一个标量场，

叫做矢量场 A 的散度场

应用散度概念分析矢量场中任一点的情况：

$\mathrm{div}A > 0$，表明 M 点有正“源”

$\mathrm{div}A < 0$，表明 M 点有负“源”

若 $\mathrm{div}A = 0$，表明该点无“源”

如果在场中处处 $\mathrm{div}A = 0$，则称此场为无“源”场

这里所谓“源”是指能够发出或吸收矢量线的源

与一般意义上的场源有区别

称为无散场更确切！

3．散度的计算

在直角坐标系中，若矢量场

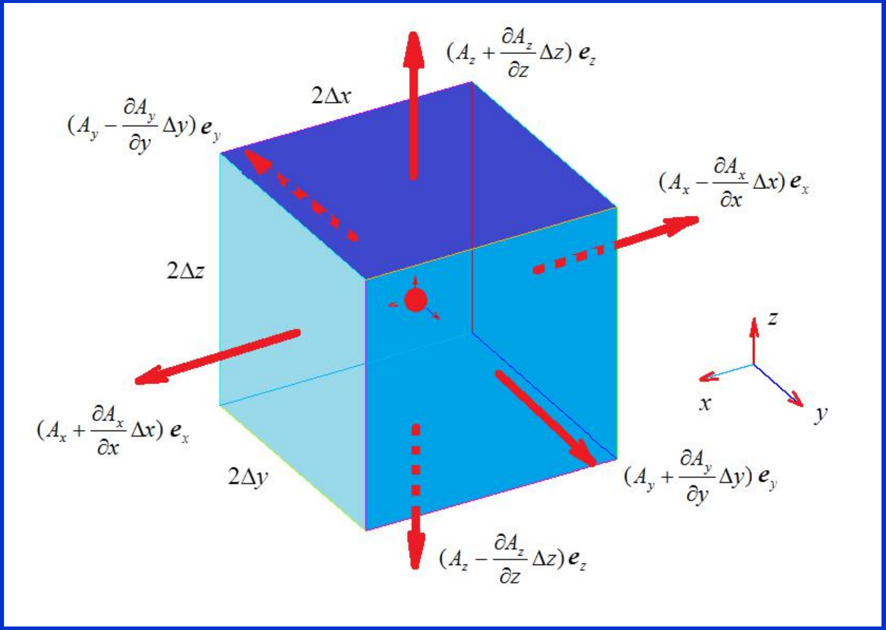
$$\boldsymbol{A}=A_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x+A_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y+A_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$$

分量 A_x, A_y, A_z 有一阶连续偏导数，

则可求 $\boldsymbol{A}$ 在任一点 M 处的散度。

根据散度的定义可知，$\mathrm{div}\boldsymbol{A}$ 与所取 ΔV 的形状无关，

只要在取极限时，所有的尺寸都趋于零即可。



以观察点 $\mathrm{M}(x,y,z)$ 为中心

作一长方体，

其三个边长分别为

$2\Delta x,\ 2\Delta y,\ 2\Delta z$ 。

分别计算从各表面散出的 A 的通量

设进入表面的通量为负，散出表面的通量为正

在 M 点附近，将矢量函数 A 展开成泰勒级数，

忽略高阶项！（谁的高阶项，为什么可以忽略？）

从前、后一对表面散出的净通量为

$$-(A_x-\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x)4\Delta y\Delta z+(A_x+\frac{\partial A_x}{\partial x}\Delta x)4\Delta y\Delta z=\frac{\partial A_x}{\partial x}8\Delta x\Delta y\Delta z$$

从左、右一对表面散出的净通量为

$$-(Ay-\frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta y)4\Delta x\Delta z+(Ay+\frac{\partial A_y}{\partial y}\Delta y)4\Delta x\Delta z=\frac{\partial A_y}{\partial y}8\Delta x\Delta y\Delta z$$

从上、下一对表面散出的净通量为

$$-(A_z-\frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta z)4\Delta x\Delta y+(A_z+\frac{\partial A_z}{\partial z}\Delta z)4\Delta x\Delta y=\frac{\partial A_z}{\partial z}8\Delta x\Delta y\Delta z$$

从 平行六面体六个面上散出的净通量为

$$\oiint \boldsymbol{A}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S}=8(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z})\Delta x\Delta y\Delta z$$

六面体的体积 $\Delta V = 8\Delta x\Delta y\Delta z$，所以

$$\frac{\oint\!\!\oint_s \boldsymbol{A}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

因此，由散度的定义

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint\!\!\oint_s \boldsymbol{A}\bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V}$$

得直角坐标系中散度的计算公式

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

例： 求点电荷 q 产生的静电场中，

场矢量 $\boldsymbol{D}=\dfrac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$ （$r\neq 0$）

在 M 处的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{D}$

解 $$\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi r^3}(x\boldsymbol{e}_x+y\boldsymbol{e}_y+z\boldsymbol{e}_z)=D_x\boldsymbol{e}_x+D_y\boldsymbol{e}_y+D_z\boldsymbol{e}_z$$

于是有 $$\frac{\partial D_x}{\partial x}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial D_y}{\partial y}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial D_z}{\partial z}=\frac{q}{4\pi}\frac{r^2-3z^2}{r^5}$$

所以

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi}\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0\quad(r\neq 0)$$

4．散度的运算公式

设 C 为空间常数， u 为空间标量函数，

$\boldsymbol{A}$ 、 $\boldsymbol{B}$ 为空间矢量函数

根据导数的运算规则，得散度的运算规则：

1） $\mathrm{div}(C\boldsymbol{A})=C\mathrm{div}\boldsymbol{A}$

2） $\mathrm{div}(u\boldsymbol{A})=u\mathrm{div}\boldsymbol{A}+\mathrm{grad}u\bullet\boldsymbol{A}$

3） $\operatorname{div}(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \operatorname{div}\boldsymbol{A} \pm \operatorname{div}\boldsymbol{B}$

公式 2) 证明如下：

$$\operatorname{div}(u\boldsymbol{A}) = \frac{\partial(uA_x)}{\partial x} + \frac{\partial(uA_y)}{\partial y} + \frac{\partial(uA_z)}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}A_x + u\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}A_y + u\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}A_z + u\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= u\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial u}{\partial x}A_x + \frac{\partial u}{\partial y}A_y + \frac{\partial u}{\partial z}A_z$$

$$= u\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \operatorname{grad}u \bullet \boldsymbol{A}$$

5．散度定理

设矢量场

$$\boldsymbol{A} = A_x(x,y,z)\boldsymbol{e}_x + A_y(x,y,z)\boldsymbol{e}_y + A_z(x,y,z)\boldsymbol{e}_z$$

各分量 A_x, A_y, A_z 在闭曲面 S 所围区域内

有一阶连续偏导数，则有

$$\oint\!\!\!\oint_S \boldsymbol{A} \bullet \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V \qquad \text{或}$$

$$\oint\!\!\!\oint_S A_x \mathrm{dydz} + A_y \mathrm{dzdx} + A_z \mathrm{dxdy} = \iiint_V \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathrm{dxdydz}$$

称为散度定理或高斯—奥斯特洛格拉特斯基公式

它的意义在于给出了

闭合曲面积分与体积分之间的等价互换关系

散度定理在电磁场原理中得到广泛的应用，

为电磁场理论的建立提供了数学基础。

散度定理的说明：

据散度的定义，A 的散度是从单位体积

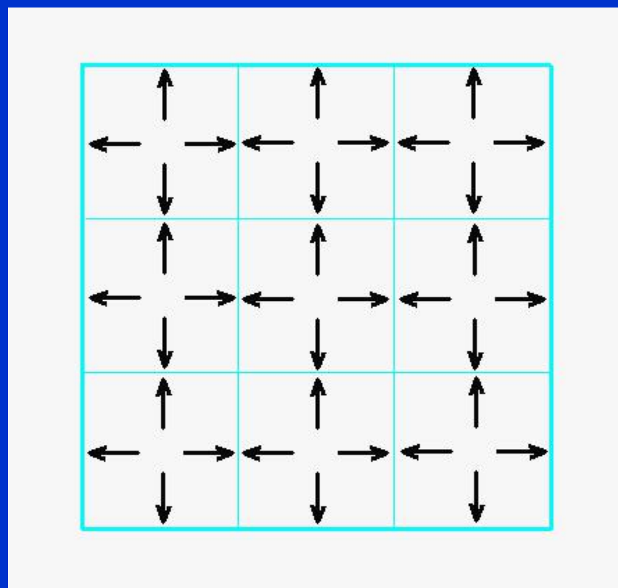
发出的 A 的通量，从整个体积中

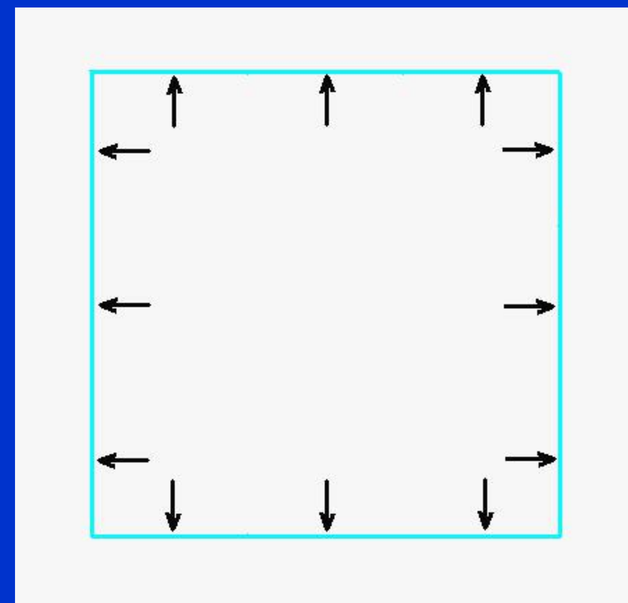
发出的通量应为 A 的散度的体积分，

德C.F. 高斯

乌M.V. 奥斯特洛格拉特斯基

也就是式等号右边的值（左图）





设想将体积V 分成许多体积元，

相邻体积元分界面上的通量相互抵消，

（从体积元发出，通量为正；

进入体积元，通量为负）

只有到了体积V的外边界面上，通量才不会抵消

整个体积中发出的通量就是外表面发出的通量

也就是等号左边的值（右图），

由此可知式成立

散度定理：

两种通量计算公式在一定条件下的等价关系！

散度部分结束